VIII Intégration + Polynôme caractéristique

VIII.A Questions de cours :

* Énoncer le théorème de convergence dominée.
* Donner la définition du polynôme caractéristique et le terme devant X^{n-1} ainsi que le terme constant.
* Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas général.

VIII.B Exercices :

Exercice 1: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2: ***

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4: **

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geqslant 1$, on a $|f_n(x)| \leqslant 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$.

Exercice 5: * Fonction Γ et limite**

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   On admettra que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

Exercice 6: *

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 7: *** Queue de la gaussienne

Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable en $+\infty$ puis donnez un équivalent en $+\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Indication : On pourra faire une IPP.

Exercice 8: ** Intégration terme à terme

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Exercice 9: *** Intégration terme à terme 2

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Exercice 10: ** sinus cardinal

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 11: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 12: ***

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.